SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

*A. Favini*

# TRASFORMAZIONI LINEARI MULTIVOCHE E APPLICAZIONI

29 Marzo 1990

## INTRODUZIONE

Nella considerazione di problemi parabolici degeneri che spesso ricorrono nelle applicazioni, mediante estensione del metodo dei semigruppi analitici, si è necessariamente costretti a risolvere equazioni del tipo

$$(\lambda M + L)u = f\,,$$

dove M e L sono operatori lineari chiusi in uno spazio di Banach complesso E, $\lambda$ è un parametro complesso, f è un dato elemento di E e u è l'incognita, e, cosa fondamentale, a determinare la dipendenza della norma di u, Lu (o che è lo stesso, $\lambda$Mu), $\|u;E\|$, $\|Lu;E\|$ da quella di f.

E' sperabile che si possa ottenere la stima migliore

$$\|(\lambda M+L)^{-1};\ \mathfrak{L}(E,D(L))\| \le \text{Cost}, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad \mathrm{Re}\lambda \ge 0, \tag{1}$$

in modo da avvicinarsi il più possibile alla situazione regolare M = I.

Ciò dipende, oltre che dagli operatori, anche dalla scelta dello spazio E. Può infatti capitare che uno spazio E naturale per L e M dia luogo a stime più deboli di (1), come

$$\|L(\lambda M+L)^{-1};\ \mathfrak{L}(E)\| \le C(1+|\lambda|)^{\alpha}, \quad \mathrm{Re}\lambda \le 0, \tag{2}$$

per $0<\alpha<1$.

Vediamo subito un esempio.

**ESEMPIO 1**

Sia $L = -\Delta$ con condizioni ai limiti di tipo Dirichlet in $H^{-1}(\Omega)$, su un aperto limitato $\Omega$ di $R^n$, $n\geq 1$, con frontiera regolare $\partial\Omega$. Sia $m(x)$ una funzione non negativa in $\Omega$ tale che $m \in L^\infty(\Omega)$ e denotiamo con M l'operatore di moltiplicazione per $m(x)$.

Sia

$$a_\lambda(u,v) = \lambda \int_\Omega m(x)u(x)\bar{v}(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla\bar{v}(x)dx,\ u,v \in H_0^1(\Omega),\ \lambda\in \mathbf{C}.$$

$a_\lambda(u,v)$ è una forma sesquilineare su $H_0^1(\Omega)$ e

$$\mathrm{Re}\, a_\lambda(u,u) = \mathrm{Re}\lambda\, \|\sqrt{m}\, u;\ L^2(\Omega)\|^2 + \|u;H^1(\Omega)\|^2$$

$$\mathrm{Im}\, a_\lambda(u,u) = \mathrm{Im}\, \lambda \|\, \sqrt{m}\, u\ ;\ L^2(\Omega)\|^2,$$

cosicchè $|a_\lambda(u,u)| \geq \delta(\|u;\, H^1(\Omega)\|^2 + |\lambda|\, \|\, \sqrt{m}\, u;\, L^2(\Omega)\|^2)$, per un certo $\delta > 0$ e per tutti i $\lambda \in \mathbf{C}$ in un settore $\Sigma$: $|\arg \lambda| \leq \omega$, $\pi/2<\omega<\pi$. Utilizzando il

teorema di Lax-Milgram, con $a_\lambda(u,v) = <(\lambda M + L)u,v)>$, $<,>$ è la dualità fra $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, deduciamo che $\lambda M+L$ ha inverso limitato da $H^{-1}(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega)$ e

$$|\lambda| \, \|\sqrt{m}(\lambda M+L)^{-1}f; L^2(\Omega)\|^2 + \|(\lambda M+L)^{-1}f; H_0^1(\Omega)|^2 \leq C \, \|f; H^{-1}(\Omega)\|^2,$$

$f \in H^{-1}(\Omega)$. Ma allora, poiché $\lambda M(\lambda M+L)^{-1} = 1-L(\lambda M+L)^{-1}$

$$\|\lambda M(\lambda M+L)^{-1}f; H^{-1}(\Omega)\| \leq C\|f;H^{-1}(\Omega), \quad f \in H^{-1}(\Omega), \quad \lambda \in \Sigma.$$

Inoltre, poiché M è limitato e non negativo da $L^2(\Omega)$ in sé, se denotiamo con $L_o$ la parte di L in $L^2(\Omega)$,

$$|\lambda| \, \|M(\lambda M+L_o)^{-1}f \, ; L^2(\Omega)\|^2 \leq C'\|f; L^2(\Omega)\|^2$$

e quindi

$$\|L_o(\lambda M+L_o)^{-1}; \mathfrak{L}(L^2(\Omega))\| \leq C(1+|\lambda|)^{1/2}.$$

Dunque, la stima ottimale (1) è ottenuta per $E = H^{-1}(\Omega)$, mentre per $E = L^2(\Omega)$, spazio più naturale, $\alpha = 1/2$.

Nel caso in cui gli operatori L e M dipendono dal "parametro" t, può

accadere, come nelle equazioni singolari (in $t = 0$) che

$$\|L(t)(\lambda M(t) + L(t))^{-1};\ \mathfrak{L}(E)\| \leq \text{Costante}$$

per ogni $0 \leq t \leq T$, $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$, ma occorrerebbe stimare analogamente anche

$$\|\frac{d}{dt}(\lambda M(t)L(t)^{-1} + 1)^{-1};\ \mathfrak{L}(E)\|;$$

quest'ultima può però avere un comportamento diverso.

**ESEMPIO 2**

Sia $-L$ il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico limitato nello spazio di Banach E e sia $M(t)$, $0 \leq t \leq T$, l'operatore di moltiplicazione per $m(t) = t^{\alpha}$, $\alpha > 1$.

Allora si ha, con $T(t) = M(t)L^{-1}$,

$$\|(\lambda T(t)+1)^{-1};\ \mathfrak{L}(E)\| \leq \text{Costante},\ \mathrm{Re}\lambda \geq 0,\ 0 \leq t \leq T,$$

e una prima stima immediata per $\|\frac{\partial}{\partial t}(\lambda T(t)+1)^{-1};\ \mathfrak{L}(E)\|$ è solo $Mt^{-1}$.

In questo Seminario esporrò alcuni risultati, da me ottenuti in

collaborazione con A. Yagi in [FY] su esistenza e unicità delle soluzioni del problema

$$(P) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t), \ 0<t\leq T, \\ M(t)u(t) \underset{t\to o+}{\to} v_o, \ v_o \in E, \end{cases}$$

dove M(t), L(t) sono operatori chiusi in uno spazio di Banach E e la condizione iniziale in (P) è soddisfatta rispetto ad una seminorma in E più debole di quella in E.

Naturalmente, si suppone che f sia almeno continua da [0,T] in E e che il fascio operatoriale $\lambda M(t)+L(t)$ sia parabolico (anzi, basterà anche meno).

Il metodo in questione per trattare (P) consiste nel cambiarlo nell'equazione con trasformazioni multivoche A(t),

$$(3) \qquad \begin{cases} dv/dt + A(t)v \ni f(t), \ 0<t\leq T, \\ v(o) = v_o, \end{cases}$$

essendo $A(t) = L(t)M(t)^{-1}$, $M(t)^{-1}$ l'inverso di M(t) come operatore multivoco.

Sebbene tale idea non sia nuova (si veda la monografia di Carroll-Showalter [CS], dove si utilizza il Teorema di generazione di Crandall-Liggett per trattare equazioni semilineari degeneri), originali e nuove appaiono le

conseguenze di essa quando applicata ad equazioni di tipo parabolico.

Fra l'altro, è possibile ottenere soluzioni regolari (e non solo deboli, come nel famoso lavoro [FS]) per problemi del tipo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t), \ 0<t\leq T, \\ m(t)u(t) \underset{t\downarrow o}{\rightarrow} 0, \end{cases}$$

dove $m(t)\geq 0$, $m \in C^{(1)}[0,T]$.

Se notiamo che, almeno formalmente, per $A = LM^{-1}$, $(\lambda+A)^{-1} = M(\lambda M+L)^{-1}$, ci si aspetta che

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\, M(\lambda M+L)^{-1}\, d\lambda \ , \ t > 0,$$

giochi il ruolo di soluzione fondamentale per la (3), con $A(t) \equiv A$.

La costruzione di una soluzione fondamentale per la (3) viene ottenuta adattando al caso multivoco la trattazione di A. Yagi [Y. 1,2]. Ciò motiva anche il modo in cui va intesa la convergenza a $v_o$ sulla condizione iniziale di (3).

## 1. TRASFORMAZIONI LINEARI MULTIVOCHE

**Definizione.** Una applicazione A dello spazio di Banach complesso X in $2^X$ è un operatore lineare multivoco se il suo dominio $D(A) = \{u \in X ; Au \neq \emptyset\}$ è un sottospazio lineare di X e Au + Av (somma di sottoinsiemi) $\subseteq A(u+v)$, $u,v \in D(A)$, $\lambda Au \subset A(\lambda u)$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ e $u \in D(A)$.

Si pone $R(A) = \cup\{Au, u \in D(A)\}$, il rango (immagine) di A.
Si vede facilmente che AO è un sottospazio vettoriale di X e che A si riduce ad un operatore lineare (univoco) se e solo se $A0 = \{0\}$. L'inverso $A^{-1}$ di A è definito da

$$D(A^{-1}) = R(A), \quad A^{-1}f = \{u \in D(A);\ Au \ni f\}$$

$A^{-1}$ è un operatore lineare multivoci e $(A^{-1})^{-1} = A$.

Si dice che l'operatore lineare multivoco B è una estensione di A se per ogni $u \in D(A) \subset D(B)$ si ha $Au \subset Bu$.

**Definizione.** Un operatore lineare univoco $A^o$ si dice una sezione lineare di A se $D(A^o) = D(A)$ e $A^o \subset A$.

**Definizione**. Sia U un operatore lineare univoco in X. Allora A+U,

AU e UA sono definiti da

$D(A+U) = D(A) \cap D(U)$, $(A+U)u = Au + Uu$, $u \in D(A+U)$,

$D(AU) = \{u \in D(U) ; Uu \in D(A)\}$ , $AUu = A(Uu)$,

$D(UA) = \{u \in D(A), Au \cap D(U) \neq \emptyset\}$, $UAu = \{Uv; v \in Au \cap D(U)\}$

Si vede facilmente che allora A+U, AU e UA sono trasformazioni lineari multivoche. Inoltre, se U e V sono lineari e univoci, allora $(UV)^{-1} = VU^{-1}$, $(U^{-1}V)^{-1} = V^{-1}U$.

**Definizione**. Se A è un operatore lineare multivoco in X, l'insieme dei $\lambda \in \mathbf{C}$ tali che $R(\lambda\text{-}A) = D((\lambda\text{-}A)^{-1}) = X$ e $(\lambda\text{-}A)^{-1}$ è un operatore limitato *univoco* in X è detto l'insieme risolvente di A e viene denotato con $\rho(A)$, $(\lambda\text{-}A)^{-1}$, per $\lambda \in \rho(A)$ è il risolvente di A. Si ha

**Teorema 1.** $\rho(A)$ è un insieme aperto di $\mathbf{C}$ e $\lambda \to (\lambda\text{-}A)^{-1}$ è una funzione olomorfa di $\lambda \in \rho(A)$, a valori in $\mathfrak{L}(X)$.

Si noti che $(\lambda_0\text{-}A)^{-1} = 0$ è, secondo la definizione, possibile. Allora $\lambda_0\text{-}A = O_\infty$ è l'inverso dell'operatore 0 e così $D(O_\infty) = \{0\}$, e $O_\infty 0 = X$; dunque, $A = O_\infty$. Ma allora $\rho(0_\infty) = \mathbf{C}$ e $(\lambda\text{-}O_\infty)^{-1} = 0$ identicamente.

**Teorema 2.** Per ogni $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda\text{-}A)^{-1}A \subset \lambda(\lambda\text{-}A)^{-1}\text{-}1 \subset A(\lambda\text{-}A)^{-1}$ e così $(\lambda\text{-}A)^{-1}Au = (\lambda\text{-}A)^{-1}f$ per ogni $f \in Au$.

**Definizione.** Denoteremo con

$$A^{o}(\lambda\text{-}A)^{-1}$$

la sezione lineare $\lambda(\lambda\text{-}A)^{-1}\text{-}1$ di $A(\lambda\text{-}A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$.

Non è allora difficile provare l'equazione risolvente per trasformazioni lineari multivoche:

**Teorema 3.** Se A,B sono trasformazioni multivoche, allora

$$(\lambda\text{-}A)^{-1} - (\mu\text{-}A)^{-1} = (\mu\text{-}\lambda)(\lambda\text{-}A)^{-1}(\mu\text{-}A)^{-1}, \quad \lambda,\mu \in \rho(A)$$

$$(\lambda\text{-}A)^{-1}\text{-}(\lambda\text{-}B)^{-1} = -A^{o}(\lambda\text{-}A)^{-1}(A^{-1}\text{-}B^{-1})B^{o}(\lambda\text{-}B)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A) \cap \rho(B).$$

## 2. SOLUZIONE DEL PROBLEMA (3)

Cominciamo col considerare (3) nel caso in cui A(t) è in effetti indipendente da t, $A(t) \equiv A$.

Si assume che f è continua da [0,T] in X, $v_0$ è dato in X e v è la soluzione. Quanto ad A, supporremo

(H1) Il risolvente $\rho(A)$ contiene la regione

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbf{C} \,;\, \mathrm{Re}\lambda \leq C(1+|\mathrm{Im}\lambda|)^{\alpha}\} \quad \text{e}$$

$$\|(\lambda-A)^{-1};\, \mathcal{L}(X)\| \leq M/(1+|\lambda|)^{\beta}\,, \quad \lambda \in \Sigma,$$

dove $0<\beta\leq\alpha\leq 1$ e M,C sono costanti positive.

Quanto al senso da dare alla soluzione di (3), che scriveremo direttamente

$$(4) \qquad \begin{cases} dv/dt + Av \ni f(t), & 0<t\leq T, \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

diremo

**Definizione.** Una funzione $v\colon [0,T] \to X$, $v \in C^1(]0,T];X)$, è una soluzione classica di (4) se $v(t) \in D(A)$ $t \in ]0,T]$, v soddisfa l'equazione in (4) e la condizione iniziale nella seminorma $\rho_A(\cdot) = \|A^{-1}\cdot\,;X\|$:

$$\|A^{-1}[v(t) - v_0]\,;X\| \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Se A soddisfa (H1), il semigruppo $\exp(-sA)$, $s \geq 0$, generato da -A, viene

definito da

$$\exp(-sA) = (2\pi\, i)^{-1} \int_\Gamma e^{-s\lambda}\, (\lambda\text{-}A)^{-1} d\lambda, \quad s > 0,$$

$$\exp(-0A) = 1,$$

dove $\Gamma$ è la curva in $\mathbf{C}$ parametrizzata da $\lambda = C(|y| + 1)^\alpha + iy$, $y \in R$.

Si verifica facilmente che vale la proprietà di semigruppo, e che $\exp(-sA)$ è $C^\infty$ su $]0,+\infty[$, con

$$A^o\exp(-sA) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda e^{-s\lambda}\, (\lambda\text{-}A)^{-1} d\lambda \;, \quad s > 0$$

Il problema è la convergenza di $\exp(-sA)$ all'identità per $s \to 0+$. Infatti, se $f \in A0$, allora $(\lambda\text{-}A)^{-1}f = 0$ e $\exp(-sA)f = 0$ per ogni $s > 0$. Però

$$\exp(-sA)A^{-1} \underset{s\to o+}{\longrightarrow} A^{-1} = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^{-1}\, (\lambda\text{-}A)^{-1}\, d\lambda \quad \text{in } \mathfrak{L}(X)$$

e così $\exp(-sA)$ converge a 1 in X rispetto alla seminorma $\rho_A(\cdot)$.

Per ogni $\theta \geq 0$, si può definire

$$(A^\theta)^o \exp(-sA) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^\theta\, e^{-s\lambda}\, (\lambda\text{-}A)^{-1}\, d\lambda, \quad s > 0$$

e si riconosce che

$$\|A^{\theta})^{o} \exp(-sA), \mathfrak{L}(X)\| \leq CD^{\theta}\Gamma\left(\frac{\theta+1-\beta}{\alpha}\right) s^{(\beta-\theta-1)/\alpha}, \quad s > 0,$$

essendo $\Gamma(\cdot)$ la funzione gamma.

La (4) viene risolta allora mediante approssimazione. A tale scopo si introducono gli approssimanti di Yosida di A, per analogia al caso classico:

$$A_n = A^{o}(1+n^{-1} A)^{-1} = n-n^2(n+A)^{-1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Si verifica che se $n\lambda(n-\lambda)^{-1} \in \rho(A)$, allora $\lambda \in \rho(A_n)$ e

$$(\lambda-A_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda-n} + \left(\frac{n}{n-\lambda}\right)^2 \left(\frac{n\lambda}{n-\lambda} - A\right)^{-1}$$

Inoltre, c'è $c_1 \in (0,c)$ tale che $\rho(A_n) \supset \tilde{\Sigma} = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}\lambda \leq \tilde{c}(1+|\mathrm{Im}\lambda|)^{a}\}$ per tutti gli $n > n_o$ sufficientemente grande.

Ora, non è detto che $A_n$ converga a qualche sezione lineare di A, ma si prova che per ogni $\lambda \in \tilde{\Sigma}$, $(\lambda-A_n)^{-1}$ converge a $(\lambda-A)^{-1}$ in $\mathfrak{L}(X)$ per $n \to \infty$.

Posto

$$v_n(t) = \exp(-t\,A_n)v_o + \int_o^t \exp(-(t-s)A_n)f(s)ds, \quad 0 \le t \le T, \quad n \ge n_o,$$

si vede che sotto ipotesi di regolarità hölderiana sulla f, $v_n(t)$ converge puntualmente a una funzinoe v(t) su [0,T]. Questa v è proprio la soluzione di (4).

Infatti

**Teorema 4.** Valgano le ipotesi in (H1), con $2\alpha+\beta>2$. Allora per ogni $f \in C\,[0,T,X]$, $(2-\alpha-\beta)/\alpha<\sigma(\le 1)$ e ogni $v_o$ la funzione

$$(5) \qquad v(t) = \exp(-tA)v_o + \int_o^t \exp(-(t-s)A)f(s)ds, \quad 0 < t \le T,$$

è una soluzione classica di (4). Viceversa, ogni soluzione classica di (4) con $f \in C[0,T;X]$ e $v_o \in X$ è necessariamente espressa come in (5).

Veniamo al problema generale (3). Diremo

**Definizione.** Una funzione v: $[0,T] \to X$ è una soluzione classica di (3) se $v \in C^1(]0,T],X)$, $v(t) \in D(A(t))$ per $0 < t \le T$, soddisfa l'equazione nella (3) e la condizione iniziale nel senso

$\|A(0)^{-1}[v(t)-v_0];X\| \to 0$ per $t \to 0+$.

Per risolvere (3) si costruisce un operatore di evoluzione $U(t,s)$ per $A(t)$, seguendo le linee dei lavori [Y. 1,2], a cui abbiamo già accennato. Allo scopo, si assume

(H2) Gli insiemi risolventi $\rho(A(t))$, $0 \le t \le T$, contengono $\Sigma$:

$$\rho(A(t)) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}\lambda \le c(1+|\mathrm{Im}\lambda|)^{\alpha}\} \text{ e}$$

$$\|(\lambda-A(t))^{-1};\ \mathfrak{L}(X)\| \le M(1+|\lambda|)^{-\beta}\ ,\quad \lambda \in \Sigma,$$

dove $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $c,M > 0$ indipendenti da t,

e una delle due seguenti condizioni di regolarità su $A(t)$:

(H3) Esistono $0<\mu,\nu \le 1$ tali che

$$\|A(t)^{o}(\lambda-A(t))^{-1}\{A(t)^{-1} - A(s)^{-1}\};\ \mathfrak{L}(X)\| \le$$

$$\le K|t-s|^{\mu}/(|\lambda|+1)^{\nu}\ ,\quad \lambda \in \Sigma,\ 0 \le s,t \le T,$$

dove $2(\alpha+\beta) + \alpha\mu + \nu > 5$,

(H4) $\quad A(\cdot)^{-1} \in C^1([0,T]\,;\,\mathfrak{L}(X))$ e

$$\|A(t)^o(\lambda - A(t))^{-1}\, dA(t)^{-1}/dt\,;\,\mathfrak{L}(X)\| \le N/(1+|\lambda|)^{\upsilon}\,,$$

$\lambda \in \Sigma,\ 0 \le t \le T, 0 < \nu \le 1,$

con $\quad 2(\alpha+\beta)+\nu > 4.$

Sia $\quad J_n(t) = (1 + n^{-1} A(t))^{-1}, \quad n \in N$

$$A_n(t) = A(t)^o\, J_n(t) = n - n^2\,(n + A(t))^{-1}, \quad n \in N.$$

Le assunzioni implicano che $A_n(\cdot)$ è Hölder-continua da $[0,T]$ in $\mathfrak{L}(X)$ e così c'è un operatore di evoluzione $U_n(t,s)$ per $A_n(t)$. Si prova allora:

**Teorema 5.** Valgano (H 2,3). Allora $U_n(t,s)$ e $U_n(t,s)\ J_n(s)$ convergono in $\mathfrak{L}(X)$ a un limite comune $U(t,s)$ per $n \to \infty$ per $0 \le s \le t \le T$. Inoltre, per ogni $f \in C^{\sigma}([0,T];X)$, $\sigma > (2-\alpha-\beta)/\alpha$ e ogni $v_o \in X$, la funzione v definita da

$$v(t) = U(t,0)v_o + \int_o^t U(t,s)f(s)ds, \quad 0 \le t \le T\,, \tag{6}$$

è una soluzione classica di (3), con

$$t^{(1-\beta)/\alpha}v\,,\ t^{(2-\beta)/\alpha}v' \in L^{\infty}(0,T;X).$$

Viceversa, se $f \in C[0,T;X]$ e $v_0 \in X$, ogni soluzione classica v di (3) con $t^{\gamma}v' \in L^{\infty}(0,T;X)$, $\gamma < (\alpha + \gamma - 1)/\alpha + \mu$ ha la forma (6).

**Teorema 6.** Valgano (H2) e (H4). Allora si ha la stessa conclusione come nella prima parte del Teorema 5. Viceversa, ogni soluzione v di (3) con $t^{\gamma}v \in L^{\infty}(0,T;X)$, $\gamma < (\alpha + \beta + \gamma - 2)/\alpha$, ha necessariamente la forma (6).

## 3. IL PROBLEMA (P)

Prima di tutto, diamo la seguente

**Definizione.** Una funzione $u : [0,T] \to X$ è una soluzione classica di (P) se $u(t) \in D(L(t))$ ($\subset D(M(t))$) per $0<t\leq T$, $Mu \in C^1((0,T];X)$ e $Lu \in C(0,T;X)$, u soddisfa l'equazione in (P) e

$$\|M(0)L(0)^{-1}[M(t)u(t)-v_0];X\| \to 0 \text{ per } t \to o+.$$

**Si ha facilmente:**

**Lemma.** Sia $T \in \mathfrak{L}(X)$ e sia $A = T^{-1}$ il suo inverso (multivoco). Allora

$(\lambda\text{-}A)^{-1} = T(\lambda T\text{-}1)^{-1} = (\lambda T\text{-}1)^{-1}\, T$, $\lambda \in \mathbf{C}$ nel senso di trasformazioni multivoche.

Le condizioni (H2), (H3), (H4) saranno allora senz'altro soddisfatte se l'operatore $T(t) = M(t)L(t)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)$ verifica, rispettivamente,

(H5) Gli operatori $(\lambda T(t)\text{-}1)^{-1}$, $0 \le t \le T$, sono operatori limitati (univoci) per ogni $\lambda \in \Sigma$ e $\|T(t)(\lambda T(t)\text{-}1)^{-1};\ \mathfrak{L}(X)\| \le M(1+|\lambda|)^{-\beta}$, $\lambda \in \Sigma$, $0 \le t \le T$, $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $M > 0$,

(H6) $\|(\lambda\ T(t)\text{-}1)^{-1}\ \{T(t)\text{-}T(s)\}\ ;\ \mathfrak{L}(X)\| \le K|t\text{-}s|^{\mu}\ (|\lambda|+1)^{-\nu}$, $\lambda \in \Sigma$, $0 \le s,t \le T$,

(H7) $T(t) \in C^1\,[0,T;\ \mathfrak{L}(X)]$ e
$\|(\lambda T(t)\text{-}1)^{-1}\ dT(t)/dt\ ;\ \mathfrak{L}(X)\| \le N(|\lambda|+1)^{-\nu}$, $\lambda \in \Sigma$, $0 \le s,t \le T$.

I Teoremi 4, 5, 6 si traducono immediatamente in risultati di esistenza ed unicità per la soluzione classica di (P), che, per brevità, non scrivo esplicitamente.

## 4. ESEMPI

**1.** Si è visto che l'operatore M,L ed $L_o$ considerati nell'Esempio 1 soddisfano stime come in (H5), con $\beta = 1$ oppure $\beta = 1/2$.

Per l'operatore $A_o = (ML_o)^{-1} = L_oM^{-1}$ (come operatore multivoco) si può ottenere una stima migliore del suo risolvente se si assume maggiore regolarità alla m, per esempio, $m \in C^1(\bar{\Omega})$, $m(x) \geq 0$ e

$$|\nabla m(x)| \leq C\, m(x)^\rho, \quad x \in \bar{\Omega}\ ,$$

essendo $\rho \in (0,1]$. Da

$$a_\lambda(u,mu) = (f,mu)\ \ ,\ \ u = (\lambda m + L_o)^{-1}f\ ,\ f \in L^2(\Omega)$$

si ha ,( , ) = prodotto interno in $L^2(\Omega)$,

$$\lambda\|mu\ ;L^2(\Omega)\|^2 + \|\sqrt{m}\,\nabla u\ ;L^2(\Omega)\|^2 = (f,mu) + (\nabla u,u\,\nabla m).$$

L'ipotesi implica che $|\nabla m(x)| = a(x)\, m(x)^\rho$, con un certo $a(x) \in L^\infty(\Omega)$. Così

$$|\lambda\|mu;L^2(\Omega)\|^2 + \|\sqrt{m}\,\nabla u;L^2(\Omega)\|^2 \leq \|f;L^2(\Omega)\|\ \|mu;L^2(\Omega)\| +$$

$$+ C \, \|mu; L^2(\Omega)\|^{\rho} \, \|u; L^2(\Omega)\|^{1-\rho} \|\nabla u; L^2(\Omega)\| .$$

Poiché $\|\nabla u; L^2(\Omega)\| \leq C \, \|f; L^2(\Omega)\|$, deduciamo che

$$M|\lambda| \, \|mu; L^2(\Omega)\|^2 \leq \|f; L^2(\Omega)\| \, \|mu; L^2(\Omega)\| + C\|mu; L^2(\Omega)\|^{\rho} \, \|f; L^2(\Omega)\|^{2-\rho}$$

$$M|\lambda| \, \|Mu; L^2(\Omega)\|^{2-\rho} \leq \|f; L^2(\Omega)\| \, \|Mu; L^2(\Omega)\|^{1-\rho} + C\|f; L^2(\Omega)\|^{2-\rho} \leq$$

$$\leq C'\|f; L^2(\Omega)\|^{2-\rho}.$$

Si noti che, per quanto si è visto prima,

$$\|u; L^2(\Omega)\| \leq C'' \, \|f, L^2(\Omega)\|.$$

Così

$$|\lambda|^{K} \, \|Mu; L^2(\Omega)\| \leq M' \, \|f; L^2(\Omega)\| \, , \; K = \frac{1}{2-\rho} \, ,$$

e

$$\|\lambda Mu; L^2(\Omega)\| \leq M' \, |\lambda|^{\gamma} \, \|f; L^2(\Omega)\|, \;\; \gamma = (1-\rho)/(2-\rho).$$

Inoltre, l'esponente $\frac{1-\rho}{2-\rho}$ è minore di 1/2. Ciò risulta molto utile se si

considerano problemi con $m(t,x)$ dipendenti anche da $t$, onde poter verificare condizioni del tipo (H7).

**2.** Sia $-L$ il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico limitato in $E$ e sia $m(t) \geq 0$ non negativa su $[0,T]$, $v_0 \in E$.

Cerchiamo una soluzione classica di

$$(7) \quad \begin{cases} d(m(t)u(t))/dt + Lu(t) = f(t), \ 0<t\leq T, \\ \|m(t)L^{-1}\{m(t)u(t)-v_0\}\ E\| \to 0 \text{ per } t \to 0+, \end{cases}$$

essendo $f$ almeno continua da $[0,T]$ in $E$.

Posto $v(t) = m(t)u(t)$, (7) viene trasformata in (4) con

$$A(t) = Lm(t)^{-1}$$

un operatore lineare multivoco definito precisamente mediante

$$D(A(t)) = D(L), \text{ se } m(t) \neq 0, \ A(t) = Lm(t)^{-1},$$

$$D(A(t)) = \{0\}, \text{ se } m(t) = 0, \ A(t) = 0_\infty.$$

Assumiamo che

$$(8) \quad \begin{cases} m \in C^1([0,T], R) \\ |m'(t)| \leq Cm(t)^\nu, \ 0\leq t\leq T, \end{cases}$$

dove $0 < \nu \leq 1$.

(8) è, per esempio, soddisfatta, se $m(t) = t^{\alpha}$, $\alpha > 1$. Poiché

$$(\lambda + A(t))^{-1} = m(t)(\lambda m(t) + L)^{-1},$$

$$\|(\lambda+A(t))^{-1}; \mathfrak{L}(E)\| \leq |\lambda|^{-1} \|\lambda m(t)(\lambda m(t)+L)^{-1}; \mathfrak{L}(E)\| \leq$$

$$\leq C|\lambda|^{-1} \text{ per } \lambda \text{ in un settore contenente } \mathrm{Re}\lambda \geq 0.$$

Vogliamo applicare il Teorema 6 ed a tal fine occorre stimare

$$\|(\lambda T(t) + 1)^{-1} dT(t)/dt; \mathfrak{L}(E)\|$$

in questo settore, $T(t) = m(t)L^{-1}$. Poiché

$$(\lambda T(t)+1)^{-1} dT(t)/dt = L(\lambda m(t)+L)^{-1} m'(t)L^{-1} = m'(t) (\lambda m(t)+L)^{-1},$$

si ha

$$\|(\lambda T(t)+1)^{-1} dT(t)/dt ; \mathfrak{L}(E)\| \leq C \frac{m(t)^{\nu}}{m(t)|\lambda|+1} \leq \frac{C'}{(|\lambda|+1)^{\nu}}$$

per tutti i $\lambda$ in un settore del piano complesso contenente $\mathrm{Re}\lambda \geq a_1$, $a_1$ sufficientemente grande.

## BIBLIOGRAFIA

[CS] CARROLL, R.W. - SHOWALTER, R.E., *Singular and degenerate Cauchy Problems,* Academic Press, 1976.

[FY] FAVINI, A.- YAGI, A., *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations,* preprint.

[FS] FRIEDMAN, A., SCHUSS, Z., *Degenerate evolution equations in Hilbert space,* Trans. AMS, 161 (1971), 401-427.

[Y1] YAGI, A., *Parabolic evolution equations in which the coefficients are the generators of infinitely differentiable semigroups,* Funkc. Ekvacioj, 32 (1989), 107-124.

[Y2] YAGI, A., *Parabolic evolution equations in which the coefficients are the generators of infinitely differentiable semigroups II,* in corso di stampa su Funkc. Ekvacioj.